

4 SEM FYUGP MINMTH4

2025

(June)



MATHEMATICS

(Minor)

Paper : MINMTH4

(Algebra)

Full Marks : 60

Time : 2 hours

*The figures in the margin indicate full marks
for the questions*

1. (a) সত্য নে অসত্য লিখা :

State True or False :

- (i) মেট্রিক্স পূৰ্ণৰ সাপেক্ষে নিৰ্ণায়ক 1 হোৱা পৰিমেয়
সংখ্যাৰ 2×2 মেট্রিক্সৰ সংহতিটো ক্রমবিনিমেয়
গোট।

1

The set of all 2×2 matrices with
determinant 1 with entries from Q is
an Abelian group under matrix
multiplication.

(2)

- (ii) সাধাৰণ পূৰণ প্ৰক্ৰিয়াৰ সাপেক্ষে
 $\{x^n - 1 = 0 | x \in C\}$ এটা গোট। 1
 $\{x^n - 1 = 0 | x \in C\}$ is a group under multiplication.
- (b) Z_n ত $j > 0$ ৰ বাবে j ৰ বিপৰীত কি হ'ব, লিখা। 1
 Write the inverse of j in Z_n , $j > 0$.
- (c) ক্ৰমবিনিময় গোটৰ সংজ্ঞা লিখা। 2
 Define an Abelian group.
- (d) দেখুওৱা যে সাধাৰণ পূৰণ প্ৰক্ৰিয়াৰ বাবে ধনাত্মক
 অপৰিময় সংখ্যাৰ সংহতি S এটা গোট নহয়। 2
 Show that the set S of positive irrational numbers is not a group under usual multiplication composition on it.
- (e) প্ৰমাণ কৰা যে এটা গোটত একক মৌল অনন্য। 2
 Prove that identity element in a group is unique.
- (f) $GL(2, Z_7)$ ত $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ ৰ বিপৰীত কি হ'ব? 3
 Find the inverse of $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ in $GL(2, Z_7)$.

(3)

- (g) প্ৰমাণ কৰা যে এটা গোট G ত 3
 Prove that in a group G
 $(abc)^{-1} = c^{-1}b^{-1}a^{-1} \forall a, b, c \in G$
- (h) প্ৰমাণ কৰা যে ' X_5 ' সাপেক্ষে সংহতি $\{1, 2, 3, 4\}$
 এটা গোট। 4
 Show that the set $\{1, 2, 3, 4\}$ is a group with respect to ' X_5 '.
2. (a) অখণ্ড সংখ্যাৰ সমষ্টি Z , বাস্তৱ সংখ্যাৰ যোগজ গোট Q ৰ
 এটা উপগোট হয়নে? 1
 Is the set Z of integers a subgroup of the additive group Q ?
- (b) $U(10)$ গোটৰ ক্ৰম কিমান? 1
 Write the order of the group $U(10)$.
- (c) প্ৰমাণ কৰা যে গোট G ৰ কেন্দ্ৰ, G ৰ এটা উপগোট। 3
 Prove that centre of a group G is a subgroup of G .



- (d) প্রমাণ কৰা যে G ৰ অবিভক্ত উপসংহতি H উপগোট হোৱাৰ প্ৰয়োজনীয় পৰ্যাপ্ত চৰ্তটো হ'ল
 $a, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$.

6

Prove that a necessary and sufficient condition for a non-empty subset H of a group G to be a subgroup of G is that
 $a, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$.

অথবা /Or

চক্ৰীয় গোটৰ সংজ্ঞা দিয়া। প্রমাণ কৰা যে n কোটিৰ সসীম গোট এটা চক্ৰীয় গোট হ'ব যদি আৰু একমাত্ৰ যদি ইয়াত n কোটিৰ এটা উপাদান থাকে।

Write the definition of cyclic group. Prove that a finite group of order n is cyclic if and only if it has an element of order n .

3. (a) অভিলম্ব উপগোটৰ সংজ্ঞা দিয়া। প্রমাণ কৰা যে H এটা G গোটৰ অভিলম্ব উপগোট যদি আৰু একমাত্ৰ যদি
 $gHg^{-1} = H \forall g \in G$.
 1+4=5

Define normal subgroup. Prove that H is a normal subgroup of a group G if and only if $gHg^{-1} = H \forall g \in G$.

- (b) লেগ্ৰেঞ্জৰ উপপাদ্যটো উল্লেখ কৰি প্রমাণ কৰা। 1+5=6

State and prove Lagrange's theorem.

অথবা /Or

ধৰা হ'ল, H এটা G ৰ উপগোট আৰু $a, b \in G$,
 তেন্তে প্রমাণ কৰা যে—

(i) $Ha = Hb$, যদি আৰু যদিহে $ab^{-1} \in H$;

(ii) Ha এটা G ৰ উপগোট হ'ব যদি আৰু যদিহে
 $a \in H$.

Let H be a subgroup of a group G and
 $a, b \in G$, then prove that—

(i) $Ha = Hb$ if and only if $ab^{-1} \in H$;

(ii) Ha is a subgroup of G if and only if
 $a \in H$.

4. (a) ক্ৰমবিনিমেয় নোহোৱা ৰিং এটাৰ উদাহৰণ দিয়া। 1

Give an example of a non-commutative ring.

- (b) এটা ৰিঙৰ একক মৌলৰ সংজ্ঞা দিয়া। 1

Define unit element in a ring.



(c) এটা আইডিয়েল নোহোৱা উপবিংৰ উদাহৰণ দিয়া।

1

Give an example of a subring which is not an ideal.

(d) প্রমাণ কৰা যে বিংত থকা সকলো a, b ৰ বাবে

2

Prove that for all a, b in ring R

$$a(-b) = (-a)b = -ab$$

(e) দেখুওৱা যে Z_{12} ইনটিগ্ৰেল ড'মেইন নহয়।

2

Show that Z_{12} is not an integral domain.

(f) প্রমাণ কৰা যে এটা বিং R ৰ উপসমষ্টি $S \neq \emptyset$, R ৰ উপবিং হ'ব যদি আৰু একমাত্ৰ যদি $a - b \in S$ আৰু $ab \in S \forall a, b \in S$.

4

Prove that a subset $S \neq \emptyset$ of a ring R is a sub-ring of R if and only if $a - b \in S$ and $ab \in S \forall a, b \in S$.

(g) প্রমাণ কৰা যে R বিঙৰ যি কোনো দুটা আইডিয়েল A আৰু B ৰ কাৰণে $A+B$ এটা R ৰ আইডিয়েল হয় য'ত $A+B$ য়ে A আৰু B দুয়োটাকে অন্তৰ্ভুক্ত কৰি লয়।

4

Prove that for any two ideals A and B of a ring R , $A+B$ is an ideal of R containing both A and B .

(h) প্রমাণ কৰা যে যি কোনো সসীম শূন্যভাজক নথকা বিং R এটা বিভাজন আঙঠি।

4

Prove that any finite non-zero ring R without zero division is a division ring.
