

Total No. of Printed Pages—8

**1 SEM TDC MTH G 1**

**2017**

( November )

**MATHEMATICS**

( General )

Course : 101

**[ A : Classical Algebra, B : Trigonometry,  
C : Vector Calculus ]**

*Full Marks : 80*

*Pass Marks : 32/24*

*Time : 3 hours*

*The figures in the margin indicate full marks  
for the questions*

**( A : Classical Algebra )**

1. (a) শূন্য অনুক্রমৰ সংজ্ঞা দিয়া।

1

Define null sequence.

(b)  $\{u_n\} = \{1 + (-1)^n\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  অনুক্রমটোৰ পৰিসৰ  
লিখা।

2

Write the range set of the sequence

$$\{u_n\} = \{1 + (-1)^n\}, n \in \mathbb{N}$$

- (c) প্রমাণ কৰা যে প্রত্যেক অভিসারী অনুক্রম পবিসীমিত। 3  
Prove that every convergent sequence is bounded.

- (d) ক'টি অভিসারী সম্ভবীয় সাধাৰণ সূত্র প্রয়োগ কৰি দেখুওৱা যে  $\{u_n\}$  অনুক্রমটো অভিসারী নহয়, য'ত

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} \quad 4$$

Use general principle of Cauchy's criterion for convergence to show that  $\{u_n\}$  is not convergent, where

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n}$$

অথবা / Or

দেখুওৱা যে  $\{u_n\}$  অভিসারী, যদি

$$u_n = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

Show that  $\{u_n\}$  is convergent, if

$$u_n = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

2. (a) বিকল্প শ্রেণীৰ সংজ্ঞা দিয়া। 1

Define alternating series.

- (b) দেখুওৱা যে এটা শ্রেণী অপসারী য'ত  $n$ তম পদটো হৈছে  $\sqrt{n^2+1} - n$ .

Show that the series whose  $n$ th term is  $\sqrt{n^2+1} - n$ , is divergent. 2

- (c) যদি  $\sum u_n$  এটা ধনাত্মক পদৰ শ্রেণী হয়, য'ত

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)^{\frac{1}{n}} = l$$

তেনেহ'লে দেখুওৱা যে শ্রেণীটো  $l < 1$  ৰ বাবে অভিসারী। 4

If  $\sum u_n$  is a positive term series, such that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)^{\frac{1}{n}} = l$$

then show that the series converges if  $l < 1$ .

- (d) তলৰ যি কোনো দুটাৰ অভিসাৰিতা পৰীক্ষা কৰা :  $4 \times 2 = 8$

Test the convergence of any two of the following :

(i)  $\frac{1}{1^p} - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^p} + \dots$ , for  $p > 0$

(ii)  $\frac{1 \cdot 2}{3^2} + \frac{2 \cdot 3}{3^3} + \frac{3 \cdot 4}{3^4} + \frac{4 \cdot 5}{3^5} + \dots$

(iii)  $1 + \frac{3}{7}x + \frac{3 \cdot 6}{7 \cdot 10}x^2 + \frac{3 \cdot 6 \cdot 9}{7 \cdot 10 \cdot 13}x^3 + \dots$

3. (a) যদি  $x^4 + x^3 - 16x^2 - 4x + 48 = 0$  সমীকৰণৰ  $\alpha, \beta, \gamma$  আৰু  $\delta$  চাৰিটা মূল হয়, তেন্তে  $\sum \alpha\beta\gamma$  ৰ মান লিখা। 1

If  $\alpha, \beta, \gamma$  and  $\delta$  are the four roots of the equation  $x^4 + x^3 - 16x^2 - 4x + 48 = 0$ , then find  $\sum \alpha\beta\gamma$ .

- (b)  $x^{2n} + 1 = 0$  সমীকৰণৰ ধনাত্মক আৰু ঋণাত্মক মূলৰ সংখ্যা নিৰ্ণয় কৰা। 2

Find the number of positive and negative roots of the equation  $x^{2n} + 1 = 0$ .

- (c) যদি  $x^3 - px^2 - qx - r = 0$  সমীকৰণৰ মূলকেইটা  
গুণোত্তৰ প্ৰগতিত থাকে, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে  
 $p^3r = q^3$ .

If the roots of the equation

$$x^3 - px^2 - qx - r = 0$$

are in GP, then show that  $p^3r = q^3$ .

4. (a) প্ৰমাণ কৰা যে  $n$  তম ঘাতৰ বীজগণিতীয় সমীকৰণ এটাৰ  
কেবল  $n$  টা বাস্তৱ অথবা কাল্পনিক মূল থাকে।

Prove that every algebraic equation of  
degree  $n$  has exactly  $n$  real or imaginary  
roots.

অথবা / Or

যদি  $x^3 + qx + r = 0$  সমীকৰণৰ  $\alpha, \beta, \gamma$  মূল হয়,

তেন্তে  $\frac{\beta\gamma}{\alpha}, \frac{\gamma\alpha}{\beta}, \frac{\alpha\beta}{\gamma}$  মূলবিশিষ্ট সমীকৰণটো গঠন কৰা।

If  $\alpha, \beta, \gamma$  are the roots of the equation  
 $x^3 + qx + r = 0$ , then form the equation  
whose roots are  $\frac{\beta\gamma}{\alpha}, \frac{\gamma\alpha}{\beta}, \frac{\alpha\beta}{\gamma}$ .

- (b) কাৰ্ডানৰ নিয়মেৰে তলৰ যি কোনো এটাৰ সমাধান কৰা :  
Solve any one of the following by  
Cardan's method :

(i)  $x^3 - 12x + 65 = 0$

(ii)  $x^3 - 3x^2 + 12x + 16 = 0$

### ( B : Trigonometry )

5. (a) মান লিখা :

Write down the value of

$$(\cos\theta - i\sin\theta)^{\frac{m}{n}}$$

- (b) প্ৰমাণ কৰা যে

Prove that

$$\cos^2\theta = 1 - \frac{2\theta^2}{2!} + \frac{2^3\theta^4}{4!} - \dots$$

- (c)  $n$  এটা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হ'লে, প্ৰমাণ কৰা যে  
If  $n$  be a positive integer, then prove that

$$(1+i)^n + (1-i)^n = 2^{\frac{n}{2}+1} \cos \frac{n\pi}{4}$$

অথবা / Or

$\sin\alpha$  ক  $\alpha$  ৰ ঘাতত বিস্তৃত কৰা।

Expand  $\sin\alpha$  in powers of  $\alpha$ .

- (a) মান লিখা :

Write down the value of

$$e^{2\pi mi}$$

- (b) প্ৰমাণ কৰা যে

$$\tan\left(i\log\frac{a-ib}{a+ib}\right) = \frac{2ab}{a^2 - b^2}$$

য'ত  $a$  আৰু  $b$  দুটা বাস্তৱ বাণী।

Prove that

$$\tan\left(i \log \frac{a-ib}{a+ib}\right) = \frac{2ab}{a^2 - b^2}$$

where  $a$  and  $b$  are two real quantities.

অথবা / Or

যদি  $x = \log \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{y}{2}\right)$  হয়, তেন্তে প্রমাণ কৰা যে

$$y = -i \log \tan\left(\frac{ix}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

If  $x = \log \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{y}{2}\right)$ , then prove that

$$y = -i \log \tan\left(\frac{ix}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

7. (a) গ্ৰেগ'ৰি'ৰ শ্ৰেণীটো উল্লেখ কৰা।

State Gregory's series.

(b) প্রমাণ কৰা

Prove that

$$\frac{\pi}{8} = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{9.11} + \dots$$

8. (a) প্রমাণ কৰা

Prove that

$$(\cosh x + \sinh x)^n = \cosh nx + \sinh nx$$

(b) যোগফল নির্ণয় কৰা (যি কোনো এটা) :

5

Find the sum (any one) :

(i)  $\sin^2 \alpha + \sin^2(\alpha + \beta) + \sin^2(\alpha + 2\beta) + \dots$   
to  $n$  terms

(ii)  $1 + \cos x + \frac{\cos 2x}{2!} + \frac{\cos 3x}{3!} + \dots$  to  $\infty$

### ( C : Vector Calculus )

(a) ভেক্টৰ বিন্দু ফলনৰ অবিচ্ছিন্নতাৰ সংজ্ঞা দিয়া।

1

Define continuity of a vector point function.

(b) সঁচা নে মিছা লিখা :

1

State True or False :

এটা সদিশ বাশিৰ বিন্দু ফলনৰ Curl এটা স্কেলাৰ বাশি।

Curl of a vector point function is a scalar quantity.

(c) এটা কণাই  $x = 2t^2$ ,  $y = t^2 - 4t$  আৰু  $z = 3t - 5$  বক্ৰৰ দিশত গতি কৰে, য'ত  $t$  হ'ল সময়। কণাটোৰ বেগ নির্ণয় কৰা, যেতিয়া  $t = 1$  হয়।

2

A particle moves along the curve  $x = 2t^2$ ,  $y = t^2 - 4t$  and  $z = 3t - 5$  where  $t$  is the time. Find the magnitude of the velocity at  $t = 1$ .

(d) যদি  $\phi(x, y, z) = 3x^2y - y^3z^2$  হয়, তেত্তে  $\nabla\phi$  ব মান  $(1, -2, -1)$  বিন্দুত নির্ণয় কৰা।

If  $\phi(x, y, z) = 3x^2y - y^3z^2$ , then find the value of  $\nabla\phi$  at the point  $(1, -2, -1)$ .

10. যদি  $\vec{A} = x^2z^2\hat{i} - 2y^2z^2\hat{j} + xy^2z\hat{k}$  হয়, তেত্তে  $\nabla \times (\nabla \times \vec{A})$  নির্ণয় কৰা।

If  $\vec{A} = x^2z^2\hat{i} - 2y^2z^2\hat{j} + xy^2z\hat{k}$ , then find  $\nabla \times (\nabla \times \vec{A})$ .

অথবা / Or

প্রমাণ কৰা (Prove that)

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$$

11. (a) অথবা (b) ব উত্তৰ কৰা :

Answer either (a) or (b) :

(a) প্রমাণ কৰা (Prove that)  $\text{Curl} (\vec{A} \times \vec{B})$   
 $= (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} - \vec{B} \text{ div } \vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{A} \text{ div } \vec{B}$

(b) প্রমাণ কৰা  $\nabla^2 r^n = n(n+1)r^{n-2}$  য'ত  $n$  এটা  
 ধ্রুবক আৰু  $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ ,  $r = |\vec{r}|$ .

Prove that  $\nabla^2 r^n = n(n+1)r^{n-2}$  where  $n$   
 is constant and  $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ ,  $r = |\vec{r}|$ .

\*\*\*