42

Total No. of Printed Pages—11

2 SEM TDC MTH G 1

2 0 1 7

(May)

MATHEMATICS

(General)

Course : 201

(Matrices, Ordinary Differential Equations and Numerical Analysis)

Full Marks : 80

Pass Marks : 32/24

Time : 3 hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions

GROUP—A

(Matrices)

(*Marks* : 20)

1. *(a)* যদি A মেট্ৰিক্সক প্ৰাথমিক ৰূপান্তৰণ প্ৰয়োগ কৰি $\begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ আহিঁলৈ ৰূপান্তৰিত কৰিব পাৰি, তেন্তে A মেট্ৰিক্সৰ কোটি হ'ব

If matrix A can be reduced to the form $\begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ by using elementary operations, then rank of A is

(i) 4

(ii) 3

(iii) 0

(iv) 1

(শুদ্ধ উত্তৰটো বাছি উলিওৱা)

(Choose the correct option)

(b) যদি $A = [a_{ij}]$ এটা nটা শাৰীৰ বৰ্গ মেট্ৰিক্স হয়, তেন্তে A মেট্ৰিক্সৰ অভিলক্ষণ সমীকৰণটো লিখা।

If $A = [a_{ij}]$ be an n rowed square matrix, then write the characteristic equation for the matrix A.

(c) যদি A আৰু B দুটা সমতুল্য মেট্ৰিক্স হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে $\rho(A) = \rho(B)$.

If A and B be two equivalent matrices, then show that $\rho(A) = \rho(B)$.

(d) একঘাতী অসমাংগী সমীকৰণ প্ৰণালী $AX = B$ সুসংগত হোৱাৰ চৰ্ত লিখা।

Write the condition for consistency of systems of linear non-homogeneous equations $AX = B$.

2. তলৰ মেট্ৰিক্সটো ইচিলন আকাৰত প্ৰকাশ কৰি কোটি নিৰ্ণয় কৰা : 5

Find the rank of the following matrix by reducing it to echelon form :

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & -4 \\ 3 & 1 & 3 & -2 \\ 6 & 3 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

অথবা / Or

দুটা অপ্ৰতিম মেট্ৰিক্স P আৰু Q নিৰ্ণয় কৰা যাতে PAQ অভিলম্ব আকাৰলৈ সলনি হয় য'ত

Find two non-singular matrices P and Q such that PAQ is in normal form, where

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

3. *(a)* দেখুওৱা যে তলৰ সমীকৰণকেইটা সুসংগত আৰু সিহঁতৰ সমাধান কৰা : 4

Show that the following equations are consistent and find their solutions :

$$2x - y + 3z = 9$$
$$x + y + z = 6$$
$$x - y + z = 2$$

(Turn Over)

(b) তলৰ মেট্ৰিক্সটোৰ অভিলক্ষণ মূল আৰু অনুৰূপ অভিলক্ষণ ভেক্টৰ নিৰ্ণয় কৰা : 3+2

Find the characteristic roots and corresponding characteristic vectors of the following matrix :

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

অথবা / *Or*

তলৰ মেট্ৰিক্সটোৰ বাবে কেলি-হেমিল্টনৰ সূত্ৰটো পৰীক্ষা কৰা : 5

Verify Cayley-Hamilton theorem for the following matrix :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

GROUP—B

(Ordinary Differential Equations)

(*Marks* : 30)

4. (a) $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ সমীকৰণটো যথাৰ্থ অৱকলীয় সমীকৰণ হোৱাৰ আৱশ্যকীয় চৰ্ত লিখা। 1

Write the necessary condition for the equation $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ to be an exact differential equation.

(b) $x^2D^2y - 2xDy - 4y = x^4$ সমীকৰণটোৰ সহায়কাৰী সমীকৰণ লিখা $\left(D = \frac{d}{dx}\right)$. 1

Write the auxiliary equation of the differential equation

$$x^2D^2y - 2xDy - 4y = x^4, \quad \left(D = \frac{d}{dx}\right)$$

5. (a) যি কোনো এটাৰ সমাধান কৰা : 3

Solve (any *one*) :

(i) $\frac{dy}{dx} + \frac{1-2x}{x^2}y = 1$

(ii) $(2x^2 + y^2 + x)\,dx + xy\,dy = 0$

(b) যি কোনো এটাৰ সমাধান কৰা : 3

Solve (any *one*) :

(i) $p^2 - p(e^x + e^{-x}) + 1 = 0, \quad p = \frac{dy}{dx}$

(ii) $(y - px)(p-1) = p, \quad p = \frac{dy}{dx}$

(c) $1+x,\ 1+2x,\ x^2$ ফলনকেইটা ৰৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ নে নিৰ্ভৰশীল; ৰনস্কিয়ানৰ সহায়ত পৰীক্ষা কৰা। 3

Using Wronskian, examine whether the functions $1+x,\ 1+2x,\ x^2$ are linearly independent or dependent.

6. (a) যি কোনো দুটাৰ সমাধান কৰা : 3×2

Solve (any *two*) :

(i) $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+y=\sin 2x$

(ii) $\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}+3y=2e^{3x}$

(iii) $\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}+4y=x^2$

দিয়া আছে (given) $x=0,\ y=\frac{3}{8}$ আৰু (and) $\frac{dy}{dx}=1$.

(b) যি কোনো এটাৰ সমাধান কৰা :

Solve (any *one*) :

(i) $x^2\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+y=2\log x$

(ii) $(x+a)^2\frac{d^2y}{dx^2}-4(x+a)\frac{dy}{dx}+6y=x$

7. (a) প্ৰথম মাত্ৰাৰ অৱকলনীয় ৰাশি আঁতৰাই তলৰ সমীকৰণটো সমাধান কৰা :

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P\frac{dy}{dx}+Qy=R$$

য'ত P, Q আৰু R হৈছে xৰ ফলন।

Removing the first-order derivative, solve the following equation :

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P\frac{dy}{dx}+Qy=R$$

where P, Q and R are the functions of x.

অথবা / Or

যদি $y=x$, $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}-y=0$ সমীকৰণৰ এটা বিশেষ সমাধান, ইয়াৰ সাধাৰণ সমাধান উলিওৱা।

If $y=x$ is a particular solution of

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}-y=0$$

find its general solution. 5

(b) স্বতন্ত্ৰ চলক সলনি কৰি সমাধান কৰা :

Solve by changing the independent variable :

$$x\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}-4x^3y=8x^3\sin x^2$$

অথবা / *Or*

প্ৰাচল ভেদ নিয়মেৰে তলৰ সমীকৰণটো সমাধান কৰা :

Apply the method of variation of parameter to solve the following equation :

$$\frac{d^2y}{dx^2}+4y=4\tan 2x$$

GROUP—C

(Numerical Analysis)

(*Marks* : 30)

8. (*a*) পুনৰুক্তি পদ্ধতিটোৰ অভিসাৰিতা চৰ্ত লিখা। 1

Write the condition of convergence of iteration method.

(*b*) বীজগণিতীয় সমীকৰণ সমাধানৰ বাবে দ্বি-বিভাজন পদ্ধতি বৰ্ণনা কৰা : 4

Describe bisection method for solving an algebraic equation.

অথবা / *Or*

পুনৰুক্তি পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰি তলৰ সমীকৰণটোৰ এটা বাস্তৱ মূল চতুৰ্থ দশমিক স্থানলৈ শুদ্ধমান নিৰ্ণয় কৰা :

Find a real root of the following equation by using iteration method correct to four places of decimal :

$$x^3+x^2-1=0$$

(*c*) নিউটন-ৰাফ্চন পদ্ধতি প্ৰয়োগ কৰি তলৰ সমীকৰণটোৰ এটা বাস্তৱ মূল তৃতীয় দশমিক স্থানলৈ শুদ্ধমান নিৰ্ণয় কৰা : 5

Using Newton-Raphson method, find a real root of the following equation correct to three places of decimal :

$$x^2-14=0$$

অথবা / *Or*

ৰেগুলা-ফলচি পদ্ধতি প্ৰয়োগ কৰি তলৰ সমীকৰণটোৰ বাস্তৱ মূল তৃতীয় দশমিক স্থানলৈ শুদ্ধমান নিৰ্ণয় কৰা :

Find the real root of the following equation by regula-falsi method, correct to three places of decimal :

$$x^3-x^2-2=0$$

(*d*) গাউছ্-জৰ্ডান পদ্ধতিৰে সমাধান কৰা : 5

Solve by Gauss-Jordan method :

$$10x+y+3z=14$$
$$x+20y+9z=-23$$
$$2x-7y-20z=-57$$

9. (*a*) অন্তৰ্বেশনৰ সংজ্ঞা দিয়া। 1

Define interpolation.

(b) দেখুওৱা যে

Show that 2

$$\Delta \log f(x) = \log \left\{ 1 + \frac{\Delta f(x)}{f(x)} \right\}$$

(c) সমদূৰৱৰ্তী কোটিৰ বাবে সাধাৰণ ক্ষেত্ৰফলন সূত্ৰটো লিখা। 2

Write the general quadrature formula for equidistant ordinates.

10. (a) নিউটনৰ অগ্ৰগামী অন্তৰ্বেশন সূত্ৰটো প্ৰতিপন্ন কৰা। 5

Deduce Newton's forward interpolation formula.

অথবা / *Or*

দিয়া আছে

Given

x	321·0	322·8	324·2	325·0
$\log_{10} x$	2·50651	2·50893	2·51081	2·51188

তেন্তে লাগ্ৰাঞ্জৰ অন্তৰ্বেশন সূত্ৰ প্ৰয়োগ কৰি $\log_{10} 323{\cdot}5$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

Then find the value of $\log_{10} 323{\cdot}5$ by using Lagrange's interpolation formula.

(b) সংখ্যাত্মক অনুকলন-সম্পৰ্কীয় ট্ৰেপিজইডেল পদ্ধতিটো প্ৰতিপন্ন কৰা। 5

Derive trapezoidal rule for numerical integration.

অথবা / *Or*

চিম্পচনৰ $\frac{1}{3}$ পদ্ধতিটো প্ৰয়োগ কৰি $\int_2^{10} \frac{dx}{1+x}$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

Find the value of $\int_2^{10} \frac{dx}{1+x}$ by using Simpson's $\frac{1}{3}$rd rule.

★★★