

6 SEM TDC MTH G 1 (A/B)

2 0 1 7

(May)

MATHEMATICS

(General)

Course : 601

Full Marks : 80

Pass Marks : 32/24

Time : 3 hours

*The figures in the margin indicate full marks
for the questions*

GROUP—A

**[(a) Abstract Algebra
(b) Elementary Statistics]**

(a) Abstract Algebra

(Marks : 45)

1. (a) ক্রমবিনিমেয় গ্রুপৰ সংজ্ঞা লিখা। 2
Define an Abelian group.
- (b) দেখুওৱা যে সাধাৰণ পূৰণ প্ৰক্ৰিয়াৰ বাবে অখণ্ড সংখ্যাৰ
সমষ্টি Z এটা গ্রুপ নহয়। 2
Show that the set Z of integers is not a
group under usual multiplication
composition on it.

(2)

- (c) দেখুওৱা যে সदिশ সংখ্যাৰ সমষ্টিত সदिশ সংখ্যাৰ অদিশ পূৰণ বিবিচাৰ প্ৰক্ৰিয়া নহয়।

Show that the scalar product of vectors is not a binary composition in the set of vectors.

- (d) অখণ্ড সংখ্যাৰ সমষ্টি Z , বাস্তৱ সংখ্যাৰ যোগজ গ্ৰুপ Q ৰ এটা উপগ্ৰুপ হয়নে?

Is the set Z of integers a subgroup of the additive group Q of rational numbers?

- (e) চক্ৰীয় গ্ৰুপৰ সংজ্ঞা দিয়া। প্ৰমাণ কৰা যে n কোটিৰ সসীম গ্ৰুপ এটা চক্ৰীয় গ্ৰুপ হ'ব যদি আৰু একমাত্ৰ যদি ইয়াত n কোটিৰ এটা উপাদান থাকে।

1+4

Write the definition of cyclic group. Prove that a finite group of order n is cyclic if and only if it has an element of order n .

- (f) অভিলম্ব উপগ্ৰুপৰ সংজ্ঞা দিয়া। প্ৰমাণ কৰা যে H এটা G গ্ৰুপৰ অভিলম্ব উপগ্ৰুপ হ'ব যদি আৰু একমাত্ৰ যদি $gHg^{-1} = H \forall g \in G$.

1+4

Define normal subgroup. Prove that H is a normal subgroup of a group G if and only if $gHg^{-1} = H \forall g \in G$.

2. (a) যদি N এটা G গ্ৰুপৰ অভিলম্ব উপগ্ৰুপ হয় আৰু G/N য়ে G ত থকা N ৰ সকলো কছেটৰ সমষ্টি বুজায়, য'ত

$$(Na)(Nb) = Nab \quad \forall Na, Nb \in G/N$$

তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে G/N এটা গ্ৰুপ।

P7/530

(Continued)

(3)

If N is a normal subgroup of a group G and G/N is the set of all cosets of N in G , where

$$(Na)(Nb) = Nab \quad \forall Na, Nb \in G/N$$

then prove that G/N is a group.

নাইবা / Or

আইছ'মৰ্ফিজিমৰ প্ৰথম সূত্ৰটো লিখা আৰু প্ৰমাণ কৰা।

5

State and prove first theorem of isomorphism.

- (b) যদি Z এটা অখণ্ড সংখ্যাৰ যোগজ গ্ৰুপ, $G = \{2^n : n \in Z\}$ আৰু $f: Z \rightarrow G$ যাতে $f(n) = 2^n \forall n \in Z$ হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে Z ৰ হ'ম'মৰ্ফিক প্ৰতিবিম্ব হৈছে G .

3

If Z be the additive group of integers, $G = \{2^n : n \in Z\}$ and $f: Z \rightarrow G$ s.t. $f(n) = 2^n \forall n \in Z$, then prove that G is homomorphic image of Z .

3. (a) অসংলগ্ন বিন্যাসৰ সংজ্ঞা লিখা।

1

Define disjoint permutation.

- (b) যুগ্ম বা অযুগ্ম বিন্যাস মানে কি বুজা?

1

What do you mean by even or odd permutation?

P7/530

(Turn Over)

- (c) প্রমাণ কৰা যে সসীম সমষ্টিৰ এটা বিন্যাসৰ যি কোনো দুটা চক্ৰ অসংলগ্ন।

Prove that any two cycles of a permutation of a finite set are disjoint.

- (d) কেলিৰ সূত্রটো লিখা আৰু প্রমাণ কৰা। 1+4
State and prove Cayley's theorem.

নাইবা / Or

এটা গ্রুপৰ অট'মৰ্ফিজিমৰ সংজ্ঞা দিয়া। প্রমাণ কৰা যে যদি $G = \langle a \rangle$, $a \neq e$ এটা চক্ৰীয় গ্রুপ হয়, তেন্তে G ৰ যি কোনো এটা এন্ড'মৰ্ফিজিম f , G ৰ অট'মৰ্ফিজিম হ'ব যদি আৰু একমাত্র যদি $f(a)$, G ৰ এটা জেনেৰেটৰ হয়।

Define automorphism of a group. Prove that if $G = \langle a \rangle$, $a \neq e$ be a cyclic group, then any endomorphism f of G is an automorphism of G if and only if $f(a)$ is a generator of G .

4. (a) প্রমাণ কৰা যে R ৰিং ত থকা সকলো a, b ৰ বাবে $a(-b) = (-a)b = -ab$.
Prove that for all a, b in ring R , $a(-b) = (-a)b = -ab$.

- (b) প্রমাণ কৰা যে এটা ৰিং R ৰ উপসমষ্টি $S \neq \emptyset$, R ৰ উপৰিং হ'ব যদি আৰু একমাত্র যদি $a - b \in S$ আৰু $ab \in S \forall a, b \in S$.

Prove that a subset $S \neq \emptyset$ of a ring R is a subring of R if and only if $a - b \in S$ and $ab \in S \forall a, b \in S$.

নাইবা / Or

প্রমাণ কৰা যে যি কোনো সসীম অশূন্য শূন্যভাজক নথকা ৰিং R এটা হৰণ ৰিং।

Prove that any finite non-zero ring R without zero-divisor is a division ring.

- (c) প্রমাণ কৰা যে R ৰিঙ-ৰ যি কোনো দুটা আইডি়েল A আৰু B ৰ কাৰণে $A + B$ এটা R ৰ আইডি়েল হয় য'ত $A + B$ য়ে A আৰু B দুয়োটাৰে সোমোৱাই লয়।

Prove that for any two ideals A and B of a ring R , $A + B$ is an ideal of R containing both A and B .

(b) Elementary Statistics

(Marks : 35)

5. (a) যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষা এটাৰ নিঃশেষী অৱস্থা বা ঘটনা মানে কি?

What are the exhaustive cases or events of a random experiment?

- (b) 1, 2, 3, ..., 19, 20 এনেদৰে নম্বৰ দিয়া 20টা বলৰ পৰা এটা বল যাদৃচ্ছিকভাৱে আনিলে বলটো 2 বা 5 ব গুণিতক হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান ?

From a set of 20 balls marked 1, 2, 3, ..., 19, 20, one is drawn at random. What is the chance of getting a number which is multiple of 2 or 5?

- (c) এটা মোনাট 8টা বগা আৰু 5টা বগা বল আছে। ঘূৰাই নোথোৱাকৈ প্ৰতিবাৰত 3টাকৈ দুবাৰ বল টনা হ'ল। প্ৰথমবাৰত 3টা বগা আৰু দ্বিতীয়বাৰত 3টা বগা বল পোৱাৰ সম্ভাৱিতা নিৰ্ণয় কৰা।

A bag contains 8 red and 5 white balls. Two successive draws of 3 balls are made without replacement. Find the probability that the first drawing will give 3 white balls and the second 3 red balls.

- (d) এজন মানুহৰ 5টা কথাৰ ভিতৰত 4টা কথাহে সত্য। তেওঁ পাশতি এটা টচ্ কৰে আৰু হয় পোৱা বুলি ব্যক্ত কৰে। পাশতিটোত সঁচাকৈয়ে হয় পোৱাৰ সম্ভাৱিতা নিৰ্ণয় কৰা।

A person speaks truth 4 out of 5 times. He tosses a die and reports that there is a six. What is the chance that actually there was a six?

5. তলৰ বিভাজনৰ পৰা চতুৰ্থক বিচলন আৰু চতুৰ্থক বিচলন গুণাংক নিৰ্ণয় কৰা :

Calculate quartile deviation and coefficient of quartile deviation for the following data :

ওজন (কেজি) : 30-34 35-39 40-44 45-49 50-54

Weight (kg)

ল'ৰাৰ সংখ্যা : 5 11 26 10 8

No. of boys

নাইবা / Or

50 আৰু 100 আকাৰৰ দুটা প্ৰতিদৰ্শৰ মাধ্য হ'ল ক্ৰমে 54.4 আৰু 50.3 আৰু সিহঁতৰ মানক বিচলন হ'ল 8 আৰু 7. দুয়োটা প্ৰতিদৰ্শ লগলগাই পোৱা 150 আকাৰৰ প্ৰতিদৰ্শটোৰ মাধ্য আৰু মানক বিচলন নিৰ্ণয় কৰা।

The means of two samples of sizes 50 and 100 respectively are 54.4 and 50.3 and their standard deviations are 8 and 7. Determine the mean and standard deviation of the sample of size 150 obtained by combining the two samples.

7. (a) এটা প্ৰতিযোগিতাত দুজন বিচাৰকে আঠগৰাকী ছাত্ৰী A, B, C, D, E, F, G আৰু H ক তেওঁলোকৰ কৃতিত্ব অনুসৰি দিয়া ক্ৰম নম্বৰৰ তালিকাখন তলত দিয়া হ'ল। উক্ত তথ্যৰ পৰা কোটি সহস্ৰস্বক গুণাংক উলিওৱা আৰু ইয়াৰ বিশ্লেষণ দিয়া :

In a contest, two judges ranked eight candidates A, B, C, D, E, F, G and H in order their performance as shown in the following table. Find the rank correlation coefficient from the given data and interpret the result :

প্রথম বিচারক First Judge	:	A	B	C	D	E	F	G
		5	2	8	1	4	6	3
দ্বিতীয় বিচারক Second Judge	:	4	5	7	3	2	8	1

- (b) তলৰ তথ্যৰ পৰা সমাপ্রয়ণ সমীকৰণ দুটা নিৰ্ণয় কৰা :
Find the two regression equations from the following data :

সমান্তৰ মাধ্য Arithmetic mean	:	x	y
		36	85
মানক বিচলন Standard deviation	:	11	8

x আৰু y ৰ মাজৰ সহসম্বন্ধ সহগ হ'ল 0.66
Correlation coefficient between x and y is 0.66

8. (a) প্রসামান্য বণ্টনৰ বক্ৰ এটাৰ আকৃতি কেনেকুৱা ?
What is the shape of a curve of normal distribution?

- (b) দ্বিপদ সম্ভাৰিতা বণ্টনৰ সংজ্ঞা দিয়া ।
Define Binomial distribution.

- (c) যদি এটা কোম্পানীয়ে উৎপাদন কৰা বিজুলীবাতিবোৰ 5% ত্রুটিযুক্ত, তেন্তে 100টা বিজুলীবাতি থকা প্ৰতিদৰ্শ এটাত—

(i) 3টা ত্রুটিযুক্ত বাতি থকাৰ;

(ii) এটাও ত্রুটিযুক্ত নথকাৰ ।

সম্ভাৰিতা নিৰ্ণয় কৰা । (দিয়া আছে $e^{-5} = 0.007$)

If 5% of the electric bulbs manufactured by a company are defective, find the probability that in a sample of 100 bulbs—

(i) 3 bulbs will be defective;

(ii) none is defective.

(Given $e^{-5} = 0.007$)

- (d) যদি এটা যন্ত্ৰই 20% ত্রুটিপূৰ্ণ সামগ্ৰী তৈয়াৰ কৰে, তেন্তে যাদৃচ্ছিক উপায়েৰে নিৰ্বাচন কৰা 4টা বস্তুৰ খুব বেছি 2টা ত্রুটিপূৰ্ণ হোৱাৰ সম্ভাৰিতা নিৰ্ণয় কৰা ।

If a machine manufactures 20% defective articles, then find the probability of getting at most two defective articles in a random selection of 4 articles.

GROUP—B

[(a) Discrete Mathematics

(b) Metric Space]

(a) Discrete Mathematics

(Marks : 45)

1. (a) তলৰ উক্তিটোৰ কোনটো অংশ উত্তৰোক্তি ?
Which part is consequent of the following statement?
যদি (If) $2 > 3$, তেন্তে (then) $3 > 4$.

- (b) বাক্য সংযোজক পাঁচটা কি কি ? সংযোজকৰ প্ৰতীকেইটা লিখা।

What are the five sentential connectives? Write the symbols for the connectives.

- (c) প্ৰতীকাত্মক ৰূপত লিখা :

1½+1½

Write in symbolic form :

- (i) এইটো মিছা যে ঘাঁহ সেউজীয়া নহয়। ('ঘাঁহ সেউজীয়া'ৰ বাবে p)

It is false that grass is not green.
(p for 'grass is green')

- (ii) যদি তুমি নিজক গড়া, তেন্তে দেশক গড়িব পাৰিবা।

('তুমি নিজক গড়া'ৰ বাবে p আৰু 'দেশক গড়িবা'ৰ বাবে q)

If you build yourself, then you can build the nation. (p for 'you build yourself' and q for 'you can build nation')

- (d) প্ৰমাণ কৰা যে তলৰ উক্তিকেইটা তকীয় সত্য (সত্য ফলনৰ সহায় লৈ) : 2+2=4

Prove that the following statements are tautology (with the help of truth table) :

(i) $(A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B$

(ii) $(\neg B \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow (\neg A)$

- (a) প্ৰমাণ কৰা যে $A \models B$ যদি আৰু একমাত্ৰ যদি $\models A \rightarrow B$. 3
Prove that $A \models B$ if and only if $\models A \rightarrow B$.

- (b) প্ৰমাণ কৰা যে (Prove that), যদি (if)

$$A_1, A_2, \dots, A_m \models B_j \text{ for } j=1, 2, \dots, p$$

আৰু যদি (and if) $B_1, B_2, \dots, B_p \models C$, তেন্তে

(then) $A_1, A_2, \dots, A_m \models C$. 4

- (c) তলৰ প্ৰতীকাত্মক ৰূপত থকা উক্তিবোৰ সাধাৰণ বাক্যত লিখা : 1½+1½=3

Translate the following symbolic statements to general statements :

(i) $\exists x (Rx \wedge Qx)$

(ii) $\forall x (Cx \rightarrow \neg Qx)$

য'ত (where)

x : এটা সংখ্যা (a number)

R : বাস্তব সংখ্যার সমষ্টি (set of reals)

Q : পৰিমেয় সংখ্যার সমষ্টি (set of rationals)

C : জটিল সংখ্যার সমষ্টি (set of complex)

3. (a) প'চেটের সংজ্ঞা লিখ।

Define poset.

(b) হেসেব চিত্র মানে কি?

What is Hasse diagram?

(c) প্রমাণ কৰা যে $(L, \leq)$ লেটিচৰ বাবে

Prove that for a lattice $(L, \leq)$

$$a \leq b \Leftrightarrow a \wedge b = a \Leftrightarrow a \vee b = b \quad \forall a, b \in L$$

(d) লেটিচ হ'ম'মর্ফিজিম মানে কি বুজা? প্রমাণ কৰা যে যদি $(L_1, \leq_1)$ আৰু $(L_2, \leq_2)$ লেটিচৰ $f: L_1 \rightarrow L_2$ এটা হ'ম'মর্ফিজিম হয়, তেন্তে

$$a \leq_1 b \Rightarrow f(a) \leq_2 f(b) \quad \forall a, b \in L_1 \quad 2+1$$

What do you mean by lattice homomorphism? Prove that if $f: L_1 \rightarrow L_2$ be a lattice homomorphism of lattices $(L_1, \leq_1)$ and $(L_2, \leq_2)$, then $a \leq_1 b \Rightarrow f(a) \leq_2 f(b) \quad \forall a, b \in L_1$.

নাইবা / Or

এটা বিভাজক লেটিচৰ সংজ্ঞা দিয়া। যদি $(L, \vee, \wedge)$ এটা বিভাজক লেটিচ হয়, তেন্তে প্রমাণ কৰা যে

$$a \wedge b = a \wedge c \text{ আৰু } a \vee b = a \vee c \Rightarrow b = c \quad \forall a, b, c \in L \quad 4$$

Define a distributive lattice. If $(L, \vee, \wedge)$ be a distributive lattice, then prove that

$$a \wedge b = a \wedge c \text{ and } a \vee b = a \vee c \Rightarrow b = c \quad \forall a, b, c \in L$$

(a) তলৰ চিত্রত দেখুওৱা $B_2 = \{0, 1\}$ এটা বুলিয়ান এলজেক্সা হয়নে? 1

Is $B_2 = \{0, 1\}$ with the following diagram a Boolean Algebra?



(b) চাৰিটা উপাদান থকা বুলিয়ান এলজেক্সা আছেনে? যদি আছে, ইয়াৰ হেসে চিত্র অংকন কৰা। 1+3=4

Does there exist a Boolean algebra with 4 elements? If so, draw its Hasse diagram.

(c) প্রমাণ কৰা যে এটা বুলিয়ান এলজেক্সাত 0 আৰু 1 উপাদান দুটা অদ্বিতীয়। 3

Prove that in a Boolean algebra, the elements 0 and 1 are unique.

(Turn Over)

(d) বুলিয়ান এলজেব্রাৰ হ'ম'মৰ্ফিজিমৰ সংজ্ঞা দিয়া।
Define homomorphism of Boolean algebra.

(e) বুলিয়ান ফলনৰ ক'নট মেপ মানে কি?
What is the Karnaugh map of Boolean function?

(f) $abc + abc + \bar{a}\bar{b}\bar{c} + \bar{a}\bar{b}\bar{c} + \bar{a}bc$ ক ইয়াৰ ক'নট মেপৰ সহায়ত প্রকাশ কৰা।
Represent $abc + abc + \bar{a}\bar{b}\bar{c} + \bar{a}\bar{b}\bar{c} + \bar{a}bc$ by its Karnaugh map.

(b) Metric Space

(Marks : 35)

5. (a) বাস্তৱ সংখ্যাৰ সমষ্টি R ত থকা মেট্রিক স্পেচৰ এটা উদাহৰণ দিয়া।

Give an example of metric space on the set of real numbers R .

(b) বন্ধ গোলকৰ সংজ্ঞা দিয়া।
Define closed sphere.

(c) প্রমাণ কৰা যে যদি N_x য়ে $x \in X$ ৰ সকলো সান্নিধ্যৰ সমষ্টি বুজায়, য'ত (X, d) এটা মেট্রিক স্পেচ, তেন্তে

$$M, N \in N_x \Rightarrow M \cap N \in N_x$$

Prove that if N_x be the collection of all nbds of $x \in X$, where (X, d) is a metric space, then

$$M, N \in N_x \Rightarrow M \cap N \in N_x$$

(d) যদি (X, d) এটা মেট্রিক স্পেচ আৰু $A \subset X$ হয়, তেন্তে প্রমাণ কৰা যে A সমষ্টিটো থকাকৈ $\bar{A}$ হৈছে X ৰ সকলোতকৈ সৰু বন্ধ উপসমষ্টি।

If (X, d) be a metric space and $A \subset X$, then prove that $\bar{A}$ is the smallest closed subset of X containing A .

(e) যদি (X, d) মেট্রিক স্পেচৰ (Y, d_y) এটা উপস্পেচ হয় আৰু $A \subset Y$ হয়, তেন্তে প্রমাণ কৰা যে $x \in Y$ এটা Y ত থকা A ৰ সীমা বিন্দু হ'ব যদি আৰু একমাত্র যদি x এটা X ত থকা A ৰ সীমা বিন্দু হয়।

If (Y, d_y) be a subspace of a metric space (X, d) and $A \subset Y$, then prove that $x \in Y$ is a limit point of A in Y if and only if x is a limit point of A in X .

নাইবা / Or

প্রমাণ কৰা যে মেট্রিক স্পেচত প্রত্যেক বন্ধ গোলক এটা বন্ধ সমষ্টি।

Prove that in a metric space, each closed sphere is a closed set.

6. (a) এটা অভিসৰী অনুক্রম মানে কি?

What is a convergent sequence?

(b) প্রমাণ কৰা যে এটা মেট্রিক স্পেচত প্রত্যেক অভিসৰী অনুক্রম পৰিসীমিত।

Prove that in a metric space every convergent sequence is bounded.

নাইবা / Or

যদি (X, d) মেট্রিক স্পেস $\{x_n\}$ এটা ক'ছি অনুক্রম হয়, তেঁতে প্রমাণ কৰা যে $\{x_n\}$ অভিসাৰী হয় যদি আৰু একমাত্র যদি ইয়াৰ এটা অভিসাৰী উপঅনুক্রম থাকে।

If $\{x_n\}$ be a Cauchy sequence in a metric space (X, d) , then prove that $\{x_n\}$ is convergent if and only if it has a convergent subsequence.

- (c) প্রমাণ কৰা যে জটিল মেট্রিক স্পেস C এটা সম্পূর্ণ মেট্রিক স্পেস।

Prove that the complex metric space C is a complete metric space.

7. (a) (X, d) মেট্রিক স্পেস এটা অনবচ্ছিন্ন ফলনৰ সংজ্ঞা দিয়া।

Define a continuous function on a metric space (X, d) .

- (b) হ'মিঅ'মৰ্ফিজিমৰ সংজ্ঞা দিয়া।

Define homeomorphism.

- (c) যদি (X, d) আৰু (Y, p) মেট্রিক স্পেস $f: X \rightarrow Y$ এটা ফলন হয়, তেঁতে প্রমাণ কৰা যে f ফলনটো অনবচ্ছিন্ন হ'ব যদি আৰু একমাত্র যদি X ৰ প্রত্যেক উপসমষ্টি A ৰ বাবে $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$ হয়।

If (X, d) and (Y, p) be metric spaces and $f: X \rightarrow Y$ be a function, then prove that f is continuous if and only if $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$ for every subset A of X .
